Exercice n°8 : Evolution d'une distribution de charge dans un métal

① Par application du th de Gauss on trouve très facilement le champ électrique au sein de la sphère :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\varepsilon_0}}$$

⚠ chp radial ⇒ les e^- vont être accélérés vers le cœur de la sphère
⇒ charge surfacique.

Pendant le régime transitoire, il existe un courant radial

$$\vec{j}(r) = j(r)\,\vec{e}_r$$

② Par équivalence des distributions de charge, on déduit la charge surfacique : $4\pi R^2 \sigma = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$

soit $\boxed{\sigma = \frac{\rho_0 R}{3}}$

③ 2 méthodes :

→ conservation de la charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \overset{\vec{j} = \gamma \vec{E}}{\Rightarrow} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \operatorname{div} \vec{E} = 0$

+ "MG" : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

donc $\boxed{\frac{\partial \rho(r;t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(r;t) = 0} \Rightarrow \boxed{\rho(r;t) = \overbrace{\rho(r;0)}^{\rho_0} e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \left(\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right)$

Par analyse des symétries de la distribution de courant, on déduit très facilement que $\vec{B} = \vec{0}$ (courant radial)

donc "MA" : $\vec{\text{rot}}\, \vec{B} = \vec{0} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{E}(r;t)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j} = \frac{\partial \vec{E}(r;t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\vec{E}(r;t) = \vec{0}$$

résolution immédiate : $\vec{E}(r;t) = \vec{E}(r;0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$

avec $\rho(r;t) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(r;t) \Rightarrow \boxed{\rho(r;t) = \underbrace{\rho(r;0)}_{\rho_0} e^{-\frac{t}{\tau}}}$

4) Nouvelle équation : $\tau \dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \vec{j} = \gamma \vec{E}$ (e)

En calculant div (e) :

$$\tau \, \text{div}\left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right) + \text{div}\, \vec{j} = \gamma \, \text{div}\, \vec{E}$$

$$\Rightarrow \tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\, \vec{j}\right) + \text{div}\, \vec{j} = \gamma \, \text{div}\, \vec{E}$$

$$\Rightarrow \tau \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t}\right) + \left(-\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t}\right) = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(r,t)$$

soit $$\boxed{\tau \frac{\partial^2 \rho(r,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(r,t) = 0}$$

Résolution : $\Delta = 1 - 4\dfrac{\gamma\tau}{\varepsilon_0}$

$$\begin{cases} r_+ = \dfrac{1}{2\tau}\left[-1 + \sqrt{1 - \dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0}}\right] \\ r_- = \dfrac{1}{2\tau}\left[-1 - \sqrt{1 - \dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0}}\right] \end{cases}$$

Signe de Δ ?

$\dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0}$? $\qquad \dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\gamma}{\varepsilon_0} \times \dfrac{m_e}{n_e e^2}\gamma$ en utilisant $\gamma = \dfrac{n e^2 \tau}{m_e}$

$$= \frac{4\gamma^2 m_e}{n_e \varepsilon_0 e^2}.$$

n_e ? Chaque atome de cuivre libère $2 e^-$ donc $n_e = 2 n_{cu}$

or $n_{cu} = \dfrac{\mu}{m_{1at}} = \dfrac{\mu}{\frac{M}{\mathcal{N}}} = \dfrac{\mu \mathcal{N}}{M} \Rightarrow n_e = \dfrac{2\mu\mathcal{N}}{M}.$

donc $\dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\gamma^2 m_e M}{2\mu\mathcal{N}\varepsilon_0 e^2} = \dfrac{2\gamma^2 m_e M}{\mu\mathcal{N}\varepsilon_0 e^2} = 3{,}42.10^5 \gg 1$

donc $r_{+/-} \simeq \dfrac{1}{2\tau}\left[-1 \pm j\sqrt{\dfrac{4\tau\gamma}{\varepsilon_0}}\right] = -\dfrac{1}{2\tau} \pm j\sqrt{\dfrac{\gamma}{\tau\varepsilon_0}}$

Ainsi, la loi d'évolution est de type : $\rho(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t\right)$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma}{\tau \varepsilon_0}} = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{m \varepsilon_0}} = \omega_p$

C.I : on peut par exemple poser que $\left| \begin{array}{l} \rho(r;0) = \rho_0 \\ \dfrac{\partial \rho(r;0)}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$ (en raison de l'inertie des charges par exemple.

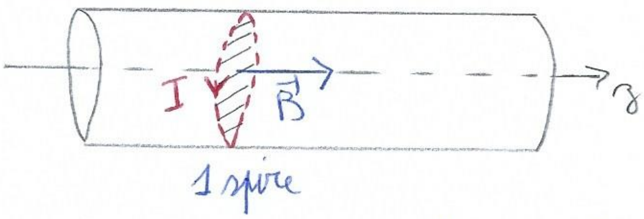
$\Rightarrow \begin{cases} A = \rho_0 \\ B\omega_p - \dfrac{1}{2\tau} A = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = \rho_0 \\ B = \dfrac{\rho_0}{2\tau\omega_p} \end{cases} \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 \left(\cos \omega_p t + \dfrac{1}{2\tau\omega_p} \sin \omega_p t \right) \underbrace{e^{-\frac{t}{2\tau}}}_{\text{terme de relaxation}}$

Conclusion : le temps de relaxation de la distribution volumique est 2τ

Exercice n° 9

(1)



$$\Phi_{1sp} = \iint_{1sp} \vec B\cdot d\vec S = \mu_0 n i(t) \iint_{1sp} \vec e_z \cdot dS\, \vec e_z = \mu_0 n i(t)\pi a^2$$

et $\Phi = N\Phi_{1sp} = N\pi a^2 \mu_0 n i(t)$

donc $L_{sol} = nN\mu_0\pi a^2 = n^2 l \mu_0 \pi a^2$ (si longueur l.)

(2) Energie potentielle magnétique stockée dans le solénoïde. $u_L = \overset{0}{R}i - e$ convention récepteur $= + \frac{d\Phi}{dt}$

$\mathcal{P}_L = u_L i_L$ or $u_L = L\frac{di(t)}{dt} = +\frac{d\Phi}{dt}$

donc: $\mathcal{E}_L = \int_0^t \mathcal{P}_L\, dt = \int_0^t L \frac{di}{dt} i(t)\,dt = \int_0^i L i\, di$

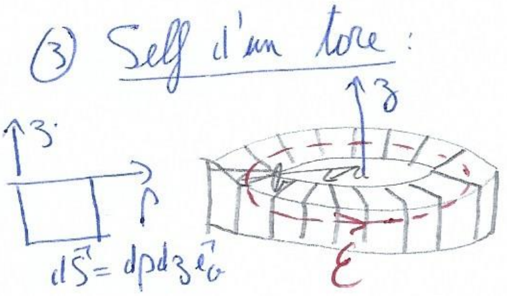
$$\Rightarrow \mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2 \xrightarrow{I \text{ permanent}} \mathcal{E}_L(t\to\infty) = \frac{1}{2} L I^2$$

Autre méthode : par l'EM (plutôt que l'électrocinétique.

$$U_L = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{\mu_0^2 n^2 i^2(t)}{2\mu_0}\pi a^2 l$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{(\mu_0 n^2 l\pi a^2)}_{L} i(t)$$

(3) Self d'un tore :



→ Symétrie + invariance → $\vec B = B(\rho;z;t)\,\vec e_\theta$

→ th Ampère : $\vec B(\rho) = \frac{N\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec e_\theta$

Self: $\Phi = N\times\Phi_{1sp} = N\times\iint_{S(1sp)} \vec B\cdot d\vec S = \frac{N^2\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho \int_0^c dz$

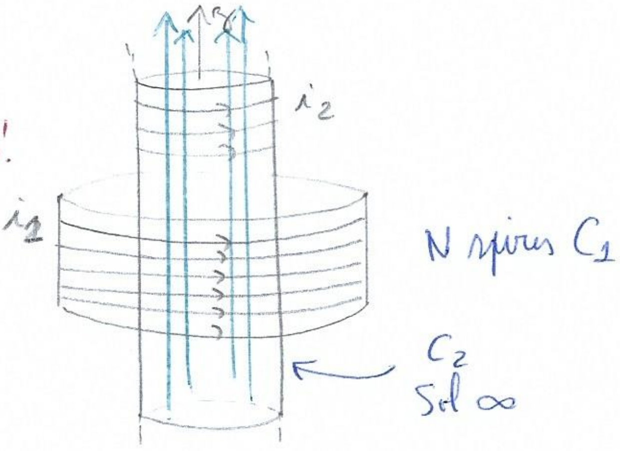
$\Rightarrow \Phi = \frac{N^2\mu_0 I}{2\pi} c \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ donc $\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Exercice n°10

NB : $M_{12} = M_{21} = M$ th de Neumann

M_{12} ? $\Phi_{1/2} = M_{1/2}\, i_1 = \iint_{C_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \quad (L_1)$ → LDC complexes !

$\Phi_{2/1} = M_{2/1}\, i_2 = \iint_{C_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 \quad (L_2)$



⇒ on fait le calcul de M avec (L_2) :

$\Phi_{21} = N \times \pi a^2 \mu_0 n_2 i_2 (t) \Rightarrow \boxed{M = \mu_0 N n_2 \pi a^2}$

TD n° 11

Exercice n° 11 : Inductance mutuelle entre deux circuits

1) Par th d'Ampère : $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e_\theta}$

2) $\Phi = N \Phi_{1p} = N^2 \int_0^a dz \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{N^2 a \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right) \times I$

3) $L = \frac{N^2 a \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right)$

4) Par th d'Ampère : $\vec{B}' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e_\theta}$

a) $\Phi' = N \times \Phi'_{1sp} = N \times \frac{\mu_0}{2\pi} a \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right) I'$

b) $M = \frac{N \mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right)$

5) a) $u_{tore} = 0 = Ri - e_t = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + M\frac{dI'(t)}{dt}$ (e)

On pose $\begin{cases} I(t) = I_1 e^{j(\omega t + \varphi)} \\ I'(t) = I_0 e^{j\omega t} \end{cases}$

donc (e) $\Leftrightarrow (R + jL\omega) I_1 e^{j(\omega t+\varphi)} + jM\omega I_0 e^{j\omega t} = 0$

$I(t) = -\frac{jM\omega}{R+jL\omega} I'(t) = \frac{M\omega}{R+jL\omega} I_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$

donc $\begin{cases} I_1 = \frac{M\omega}{\sqrt{R+L^2\omega^2}} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{L\omega}{R} \end{cases}$

donc $I(t) = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} I_0 \cos\left(\omega t - \arctan\frac{L\omega}{R} - \frac{\pi}{2}\right)$

soit $I(t) = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} I_0 \sin\left(\omega t - \arctan\frac{L\omega}{R}\right)$

b) $L\omega \gg R \Rightarrow I(t) = +\frac{M}{L} I_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = (-) \frac{M}{L} I_0 \cos \omega t$

opposition de phase avec le tore.